

Р.В. Миненко

## ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ СОВМЕСТНОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ И МАГНИТОМЕТРИИ

Розроблено ітераційні методи розв'язку лінійно-нелінійної оберненої задачі гравіметрії та магнітометрії на основі сумісного використання в одному критерії та в одній ітерації обох полів.

Разработаны итерационные методы решения линейно-нелинейной обратной задачи гравиметрии и магнитометрии на основе совместного применения в одном критерии и в одной итерации двух полей.

Created an iterative methods of the decision of a linear-nonlinear return problem gravity and magnetic on the basis of joint application in one iteration and in one iteration of both types of physical fields.

Известны методы решения обратной линейно-нелинейной задачи гравиметрии (ОЛНЗГ) или магнитометрии (ОЛНЗМ) по одному физическому полю [1], в том числе для нескольких интерпретационных сеточно-блоковых слоистых моделей (ИСБСМ), объединенных под одним критерием условной оптимизации (КУО) [2]. Представляет практический интерес метод совместного решения объединенной под одним критерием обратной линейно-нелинейной задачи гравиметрии и магнитометрии (ОЛНЗГМ), однако он имеет тот же недостаток – необходимость трудоемкого определения коэффициентов Лагранжа. Эта цель достигается тем, что в фильтрационном методе решения ОЛНЗГ для двух конгруэнтных ИСБСМ (одна для аномальной плотности (АП) блоков горных пород, а другая – для интенсивности их намагничивания (ИН)), используют объединяющий критерий в виде произведения двух частных критериев оптимизации по магнитному полю (МП) и по полю силы тяжести (ПСЖ). Такой метод является нелинейным, но не требует определения коэффициентов Лагранжа. В дальнейшем, при построении методов решения обратных задач (ОЗ) будем использовать необходимые формулы и обозначения из [1, 2], а поэтому перечислим их кратко и без подробных пояснений:

а) итерационные формулы для АП ( $\sigma_{i,n,1}$ ), ИН ( $J_{i,n,2}$ ) и глубин ( $h_{i,n}$ ) до границ слоев с итерационными коэффициентами (ИтК) ( $\tau_{1,n+1}, \tau_{2,n+1}, \mu_{n+1}$ ) и итерационными поправками (ИП) ( $B_{i,n,1}; B_{i,n,2}; C_{i,n}; i=1, M$ ), аналогичными поправкам акад. НАН Украины В.И. Старостенко, вычисляемыми на каждой итерации с номером  $n$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{i,n+1,1} &= \sigma_{i,n,1} - \tau_{1,n+1} B_{i,n,1}; \\ B_{i,n,1} &= (a_{ij,n,1}, r_{j,n,1} / \lambda_{i,1} \lambda_{j,1}); \\ J_{i,n+1,2} &= J_{i,n,2} - \tau_{2,n+1} B_{i,n,2}; \\ B_{i,n,2} &= (b_{ij,n,2}, r_{j,n,2} / \lambda_{i,2}^{\alpha} \lambda_{j,2}^{\beta}); \\ h_{i,n+1} &= h_{i,n} - \mu_{n+1} C_{i,n}; \\ C_{i,n} &= (b_{ij,n,2}, r_{j,n,2} / \lambda_{i,2}^{\alpha} \lambda_{j,2}^{\beta}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{i,1} &= \sum_j |a_{i,j,1}|; \lambda_{j,1} = \sum_i |a_{i,j,1}|; \lambda_{i,2} = \sum_j |b_{i,j,2}|; \\ \lambda_{j,2} &= \sum_i |b_{i,j,2}|; \alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 = const; \end{aligned}$$

б) элементы матриц решения прямых задач гравиметрии  $a_{ij,n,1}, b_{ij,n,1} = (a_{ij,n,1})'_z, c_{ij,n,1} = (b_{ij,n,1})'_z$  и магнитометрии  $b_{ij,n,2} = (a_{ij,n,2})'_z, c_{ij,n,2} = (b_{ij,n,2})'_z$ , вычисляемые на каждой  $n$ -й итерации, и формулы связи для них на соседних итерациях:

$$\begin{aligned} a_{ij,n+1,1} &= a_{ij,n,1} + \mu_{n+1} b_{ij,n,1} C_{i,n}; \\ b_{ij,n+1,2} &= b_{ij,n,2} + \mu_{n+1} c_{ij,n,2} C_{i,n}; \end{aligned}$$

в) невязки  $r_{j,n,1}$  и  $r_{j,n+1,1}$  гравитационного поля  $g_{j,1}$  ( $j=1, N$ ) (измеренного в  $N$  точках), вычисляемые на смежных итерациях по формулам:

$$\begin{aligned} r_{j,n,1} &= (a_{i,j,1}, \sigma_{i,n,1}) - g_{j,1}; \\ \gamma_{j,1} &= (a_{i,j,1}, B_{i,n,1}); \\ r_{j,n+1,1} &= r_{j,n,1} + \mu_{n+1} \beta_{j,1} - \\ &\quad - \tau_{n+1,1} \gamma_{j,1} - \mu_{n+1} \tau_{n+1,1} \beta_{1j,1}; \\ \beta_{j,1} &= (b_{i,j,1}, C_{i,n} \sigma_{i,n,1}); \\ \beta_{1j,1} &= (b_{i,j,1}, C_{i,n} B_{i,n,1}); \end{aligned}$$

и невязки  $r_{j,n,2}$  и  $r_{j,n+1,2}$  магнитного поля  $Z_{aj,2}$  ( $j=1, N$ ) (измеренного в  $N$  точках), вычисляемые на смежных итерациях по формулам:

$$\begin{aligned} r_{j,n,2} &= (b_{i,j,2}, J_{i,n,2}) - Z_{aj,2}; \\ \gamma_{j,2} &= (c_{i,j,2}, B_{i,n,2}); \\ r_{j,n+1,2} &= r_{j,n,2} + \mu_{n+1} \beta_{j,2} - \\ &\quad - \tau_{n+1,2} \gamma_{j,2} - \mu_{n+1} \tau_{n+1,2} \beta_{1j,2}; \\ \beta_{j,2} &= (c_{i,j,2}, C_{i,n} J_{i,n,2}); \\ \beta_{1j,2} &= (c_{i,j,2}, C_{i,n} B_{i,n,2}); \end{aligned}$$

г) частные критерии оптимизации (ЧКО) на  $n + 1$ -й итерации:

$$F_{r,1} = \sum_j r_{j,n+1,1}^2;$$

$$F_{r,2} = \sum_j r_{j,n+1,2}^2.$$

Дальше распишем ЧКО и их частные производные без индексов принадлежности к полю:

$$F_r = \sum_j (r_{j,n+1})^2 = \sum_j (r_{j,n} + \mu_{n+1} \beta_{j,n}) - \tau_{n+1} \gamma_{j,n} - \mu_{n+1} \tau_{n+1} \beta_{1j,n})^2.$$

Введем обозначения:

$$d_{14} = (r_{j,n}, \gamma_{j,n}); R_{jgb} = (\beta_{j,n}, \gamma_{j,n});$$

$$R_{jbl} = (r_{j,n}, \beta_{1j,n}); d_{12} = R_{jgb} + R_{jbl};$$

$$d_{11} = (\gamma_{j,n,1}, \gamma_{j,n,1}); d_{44} = (r_{j,n,1}, r_{j,n,1});$$

$$d_{22} = (\beta_{j,n}, \beta_{j,n}).$$

Запишем ЧКО и частные производные, ограничиваясь линейными членами:

$$F_r = d_{44} + 2 \mu_{n+1} d_{24} - 2 \tau_{n+1} d_{14};$$

$$(F_r)'_{\tau_{n+1}} = d_{14} + \mu_{n+1} d_{12} - \tau_{n+1} d_{11};$$

$$(F_r)'_{\mu_{n+1}} = d_{24} + \mu_{n+1} d_{22} - \tau_{n+1} d_{12}. \quad (1)$$

Учитывая, что

$$d_{11,1} = (\gamma_{j,n,1}, \gamma_{j,n,1});$$

$$d_{44,1} = (r_{j,n,1}, r_{j,n,1});$$

$$d_{11,2} = (\gamma_{j,n,2}, \gamma_{j,n,2});$$

$$d_{44,2} = (r_{j,n,2}, r_{j,n,2});$$

и т.д., из ЧКО составим общий КО для ОЛНЗГМ:

$$\Phi_{r,r} = F_{r,1} F_{r,2} = \min; \quad (2)$$

Дифференцируя (2) по ИтК, получим систему уравнений для их определения:

$$(\Phi_{r,r})'_{\mu_{n+1}} = (F_{r,1})'_{\mu_{n+1}} F_{r,2} + (F_{r,2})'_{\mu_{n+1}} F_{r,1} = 0;$$

$$(\Phi_{r,r})'_{\tau_{n+1,1}} = (F_{r,1})'_{\tau_{n+1,1}} F_{r,2} = 0;$$

$$(\Phi_{r,r})'_{\tau_{n+1,2}} = (F_{r,2})'_{\tau_{n+1,2}} F_{r,1} = 0; \quad (3)$$

Подставляя (1) в (3) и группируя коэффициенты при неизвестных ИтК, получим систему 3-х уравнений:

$$T_{k,1} (-\mu_{n+1}) + T_{k,2} \tau_{n+1,1} + T_{k,3} \tau_{n+1,2} = T_{k,0}; k = 1, 2, 3; \quad (4)$$

где  $T_{1,0} = d_{44,2} d_{24,1} + d_{24,2} d_{44,1};$  (5)

$$T_{2,0} = d_{44,2} d_{14,1};$$

$$T_{3,0} = d_{44,1} d_{14,2};$$

$$T_{1,1} = 4 d_{24,2} d_{24,1} + d_{22,2} d_{44,1} + d_{22,1} d_{44,2};$$

$$T_{2,1} = d_{12,1} d_{44,2} + 2 d_{14,1} d_{24,2};$$

$$T_{3,1} = d_{12,2} d_{44,1} + 2 d_{14,2} d_{24,1};$$

$$T_{3,2} = 2 d_{14,1} d_{14,2};$$

$$T_{1,2} = T_{2,1}; T_{1,3} = T_{3,1}; T_{2,3} = T_{3,2};$$

$$T_{2,2} = d_{11,1} d_{44,2};$$

$$T_{3,3} = d_{11,2} d_{44,1}.$$

Решая систему (4)-(5), вычислим все ИтК для итерационных формул с номером  $n + 1$ . Аналогично разработаем метод для более простого критерия:

$$\Phi_{r1+r2} = F_{r,1} + \lambda (F_{r,2})'_{\mu_{n+1}} = \min. \quad (6)$$

Дифференцируя (6) по ИтК, получим систему уравнений для их определения:

$$((F_{r,2})'_{\mu_{n+1}})'_{\tau_{n+1,2}} = 0;$$

$$(F_{r,1})'_{\tau_{n+1,1}} = 0;$$

$$(F_{r,2})'_{\mu_{n+1}} = 0. \quad (7)$$

Подставляя (1) в (7) и группируя коэффициенты при неизвестных ИтК, получим систему 3-х уравнений для вычисления ИтК:

$$((F_{r,2})'_{\tau_{n+1,2}})'_{\mu_{n+1}} = d_{1234,2} + 2 \mu_{n+1} d_{23,2} - \tau_{n+1,2} d_{13,2}; \quad (8)$$

$$(F_{r,2})'_{\mu_{n+1}} = d_{24,2} + \mu_{n+1} d_{22,2} - \tau_{n+1,2} d_{1234,2};$$

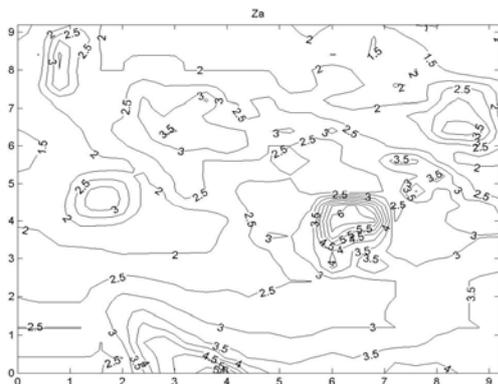
$$d_{1234,2} = d_{12,2} + d_{34,2};$$

$$(F_{r,1})'_{\tau_{n+1,1}} = d_{14,1} + \mu_{n+1} d_{1234,1} - \tau_{n+1,1} d_{11,1}.$$

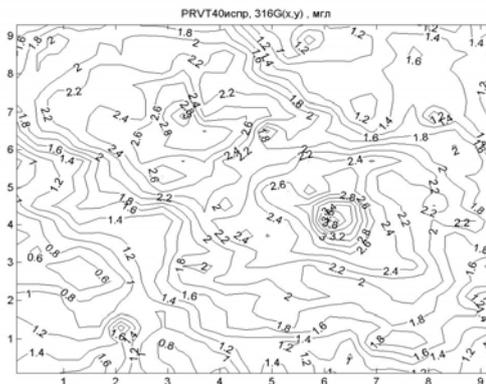
Выше приведены два нефльтрационных метода (1)–(5) и (6)–(8), разработанные автором самостоятельно. Однако вычислительные программы по ним еще не составлены. В [3] приведены результаты совместной интерпретации двух полей фильтрационными методами. В разработке и реализации некоторых из них автор принимал активное участие, и позже были получены более интересные практические результаты, которые предполагается сравнить с результатами интерпретации методами (1)–(8).

Поэтому приведем один пример выполненного совместно с соавторами [3] решения ОЛНЗГМ по

аномалиям магнитного и гравитационного поля, измеренным на УКЦ в Кривбассе (рис. 1).

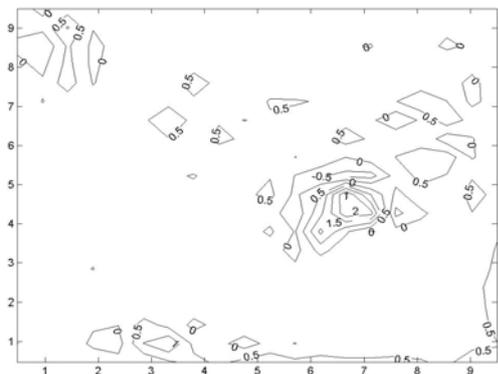


а)

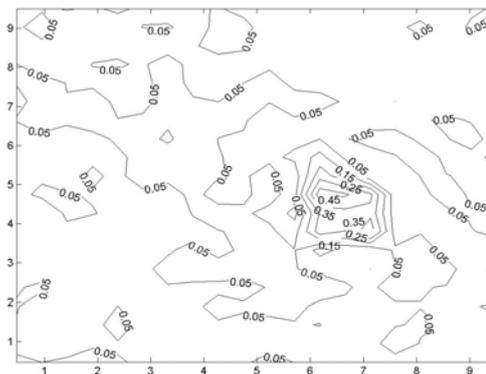


б)

Рис. 1. Карты неосредненного магнитного (а) и гравитационного (б) поля (здесь и далее расстояния приведены в км, изодинамы обозначены в сотнях нТ, изоаномалы – в мгл, изолинии: глубин – в м, АП – в  $г/см^3$ , ИН – в сотнях относительных единиц, о.е.)

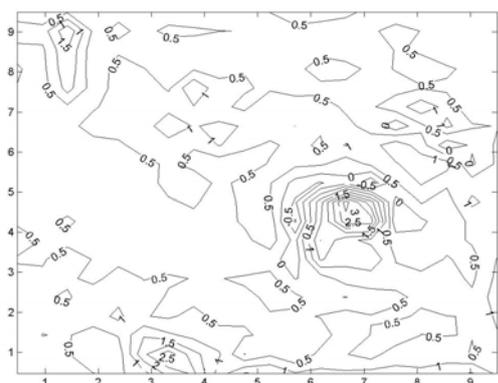


а)

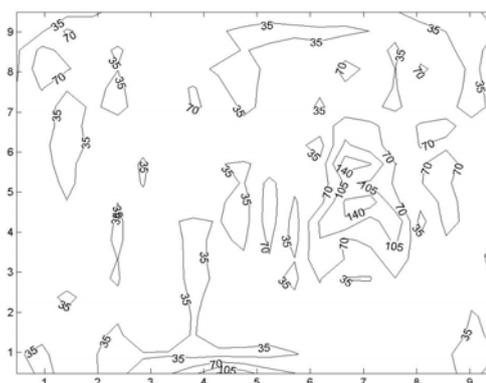


б)

Рис. 2. Результаты совместного решения ОЛНЗГМ: а – карта интенсивности намагничивания второго слоя трехслойной модели; б – карта аномальной плотности второго слоя



а)



б)

Рис. 3. Результаты совместного решения объединенной обратной задачи гравиметрии и магнитометрии: а – карта интенсивности намагничивания второго слоя; б – карта глубин до границы первого аномального слоя а) в интервалах 10-50 м и б) 35-140 м

На рис. 2 приведены результаты совместного решения обратной задачи по двум полям при одних и

тех же размерах и местоположению блоков ИСБСМ для каждого поля. Координаты точек измерения ка-

ждого поля совпадают. Это обеспечивает высокую устойчивость и геологическую содержательность решения ОЗ.

На рис. 3, а приведена карта интенсивности намагничивания третьего слоя, а на рис. 3, б – карта глубин до кристаллического фундамента (первого аномального слоя трехслойной модели). Максимальная глубина 140 м в точках с координатами (7;4,5 км) и (7;5,7 км). На рис. 4, а приведена карта глубин до второго аномального слоя, а на рис. 4, б – карта глубин до третьего аномального слоя. В точке с координатами (7;4,5 км) глубины до второго и тре-

тьего слоев, соответственно равны 650 и 1050 м. Конфигурация изолиний глубин на этой карте имеет довольно много сходства с формой изолиний на картах двух полей. Это означает, что алгоритм метода при решении ОЗ реагирует на оба поля и вычисляет и одни, и другие физические свойства. На рис. 4, в, г приведены карты остатков поля со среднеквадратичными погрешностями 7нТ и 0,088 мгл. Максимальные невязки на отдельных аномалиях редко превышают 20 нТ и 0,2 мгл, что свидетельствует о высокой устойчивости решения объединенной обратной задачи.

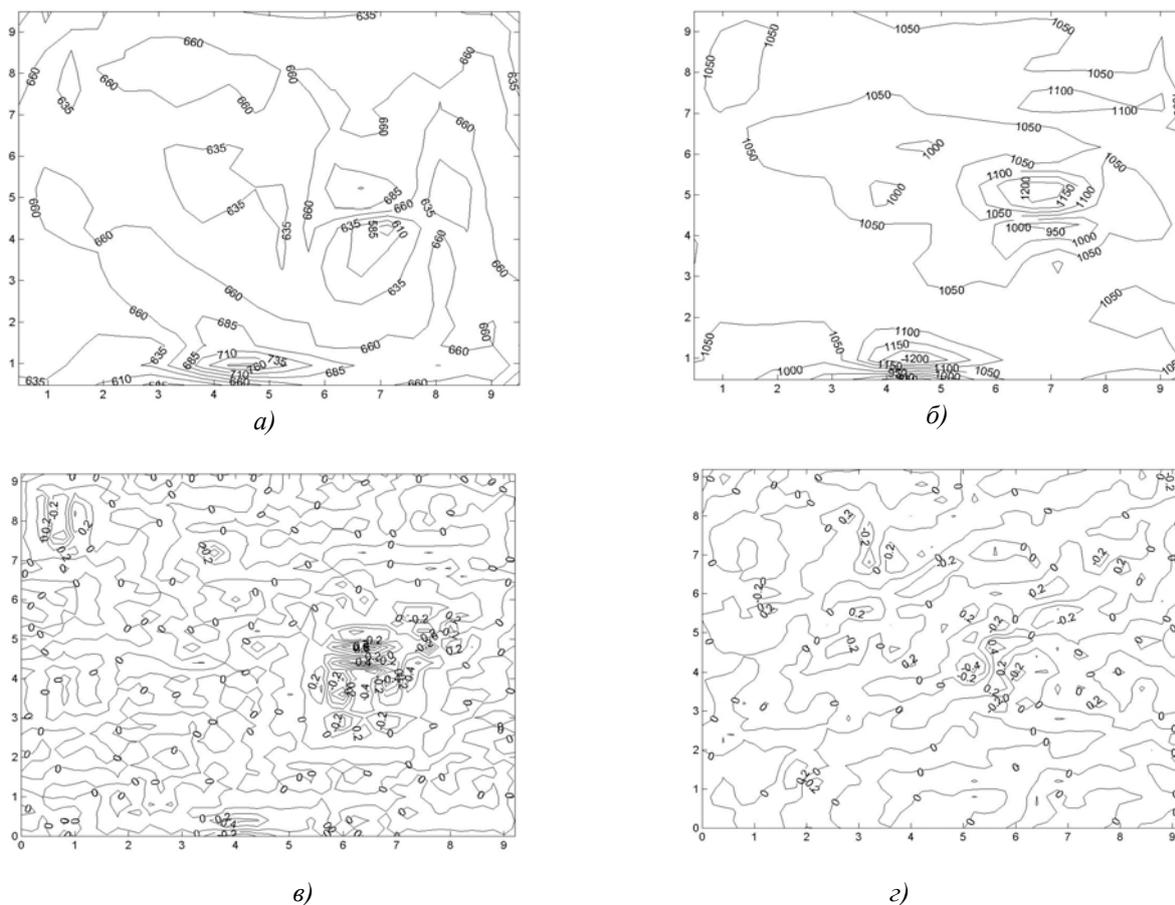


Рис. 4. Результаты совместного решения ОЛНЗГМ: а – карта глубин до границы второго слоя в интервале 585-760 м; б – карта глубин до границы третьего слоя в интервале 950-1200 м; в – карта остатков магнитного поля ( $tr = 7$  нТ); г – карта остатков поля силы тяжести ( $tr = 0,088$  мгл)

**Выводы.** Используя устойчивые фильтрационные методы, можно получить геологически содержательное решение нелинейной обратной задачи, объединяющей под одним критерием оптимизации гравитационное и магнитное поля.

#### Список литературы

1. Миненко П.А. Поправки для сходящегося итерационного метода в обратных линейных задачах гравиметрии и магнитометрии // Науковий вісник НГУ. – 2008. – № 10. – С. 56-60.

2. Миненко П.А. Обратная задача гравиметрии в классе интерпретационных моделей // Науковий вісник НГУ. – 2008. – № 8. – С. 73-76.

3. Миненко П.А., Миненко Р.В., Мечников Ю.П. Применение метода поиска общих глубинных точек для совместной интерпретации гравитационного и магнитного поля // Матер. IX Міжнар. наук. конф. «Моніторинг геологічних процесів», м. Київ, 14-17 жовтня 2009 р. / КНУ ім. Т. Шевченка. – К., 2009. – С. 79-80.

Рекомендовано до публікації к.т.н. О.Г. Бондаруком 03.11.09